یک اثبات آسان از اتحاد مثلثاتی $\sin(\alpha+\beta)$

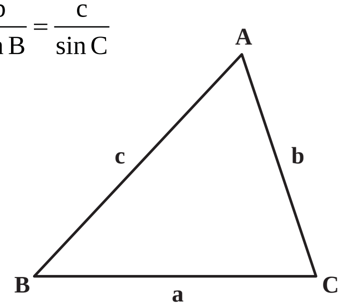
امین کشاورز، شیراز

اشاره

برای رسیدن به حاصل $\sin(\alpha+\beta)$ برحسب نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های α و β (با فرض حاده بودن α و β) به قضایای مقدماتی زیر نیازمندیم:

■ **قضیهٔ ۱.** در هر مثلث ABC با اضلاع a، b و c داریم:

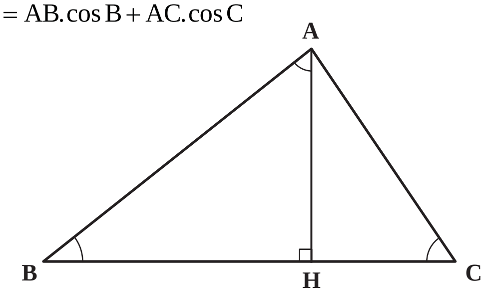
$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$$



درستی این قضیه که به قضیهٔ سینوس‌ها موسوم است، در بسیاری از کتاب‌های ریاضی، از جمله کتاب ریاضی ۲ دبیرستان (سال تحصیلی ۹۵-۹۴) اثبات شده است.

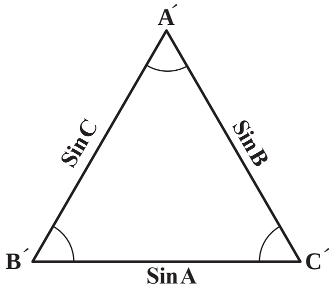
■ **قضیهٔ ۲.** در هر مثلث، هر ضلع برابر است با حاصل‌ضرب دو ضلع دیگر در کسینوس‌های زاویه‌های بین آن ضلع‌ها و این ضلع. مثلاً در شکل زیر داریم:

$$BC=AB.\cos B+AC.\cos C$$



اثبات به عهدهٔ خواننده (از تعریف‌های cosB و cosC در مثلث‌های قائم‌الزاویه استفاده کنید).

حال با توجه به قضیهٔ (۱) روشن است که اندازه‌های sinA، sinB و sinC با اندازه‌های a، b و c متناسب‌اند. پس اگر a، b و c طول اضلاع مثلثی باشند، مثلثی با اضلاع به طول‌های sinA، sinB و sinC وجود دارد که با مثلثی به اضلاع a، b و c متشابه است:



بنابراین: $\hat{A}'=\hat{A}$ و $\hat{B}'=\hat{B}$ و $\hat{C}'=\hat{C}$. حال در مثلث A´B´C´ طبق قضیهٔ (۲) داریم:

$$B'C'=A'B'.\cos\hat{B}'+A'C'.\cos\hat{C}'$$
$$\Rightarrow \sin A=\sin C.\cos B+\cos C.\sin B$$

و چون: $\hat{B}+\hat{C}=۱۸۰^\circ-\hat{A}$ بنابراین $\sin(B+C)=\sin A$ و در نتیجه:

$$\sin(B+C)=\sin B.\cos C+\cos B.\sin C$$

به راحتی می‌توان نشان داد، اگر B و C زاویه‌های منفرجه‌ای هم باشند، باز این اتحاد برقرار است و در حالت کلی داریم:

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha.\cos\beta+\cos\alpha.\sin\beta$$

پرسش‌های بیکارجو!

دایرهٔ C(O,R) و نقطهٔ A در بیرون آن مفروض‌اند. اگر M نقطه‌ای دلخواه روی محیط دایره باشد، مکان هندسی نقطهٔ برخورد خط مماس بر دایره در نقطهٔ M و عمودمنصف AM کدام است؟

☐ الف) دو خط راست موازی

☐ ب) یک خط راست عمود بر OA

☐ ج) محیط یک دایره

☐ د) قسمتی از محیط یک دایره

☐ هـ) یک خط راست موازی OA

۵